第 32 讲 安培环路定理的应用 磁场对载流导线的作用

教学要求：

了解磁场对载流线圈的作用，熟练地应用安培环路定理解决问题，安培定律及其应用。

重点与难点：

重点：安培环路定理的应用，安培定律及其应用。

难点：右螺旋法则。

10.2.2 安培环路定理的应用

与利用高斯定理可以方便地计算出某些具有对称性带电体的电场分布一样，利用安培环路定理也可以方便地计算出具有特殊对称性的载流导线所产生的磁场。下面讨论几个简单的应用。

利用安培环路定理求磁场分布一般思路：首先依据电流的对称性分析磁场分布的对称性，然后再根据定理计算磁感应强度的数值和方向。此过程中决定性的技巧是选取合适的闭合路径 L（也称**安培环路**），以便使积分 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 中的 $\vec{B}$ 能从积分号内提出来。

1 “无限长”载流圆柱形导线内外磁场分布

设“无限长”载流圆柱形导线的圆柱体半径为 R，通有电流 I，电流均匀地分布在圆柱体横截面。如图 10-23(a)所示。显然，场源电流对中心轴线分布对称，因此无限长载流圆柱形导线的磁场分布具有轴对称性，磁感线是一组分布在垂直于轴线的平面上并以轴线为中心的同心圆，磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小只与场点 P 到载流圆柱轴线的垂直距离 r 有关，故可取垂直于柱轴、且以柱轴上一点 O 为圆心、r 为半径的圆周作为闭合路径 L [图 10-23(a)]。在所取的同一闭合圆周路径 L 上，各点的磁感应强度的大小相等。$\vec{B}$ 的方向与电流构成右手螺旋关系：在通过场点 P 的导线横截面上[图 10-23(b)]，取一对面积元 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$，它们关于连线 OP 对称。设 $\mathrm{d}\vec{B}_1$ 和 $\mathrm{d}\vec{B}_2$ 是以 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 为横截面的长直电流在点 P 的磁感应强度。从图示的关系可以看出，它们对闭合路径 L 在点 P 的切线对称，故合矢量 $\mathrm{d}\vec{B}=\mathrm{d}\vec{B}_1+\mathrm{d}\vec{B}_2$ 沿 L 的切线方向（即垂直于半径 r）。由于整个柱截面可以成对地分割成许多对称的面积元，以对称面积元为横截面的每对长直电流在点 P 的磁感应强度（合矢量）也都沿 L 的切线方向。因此，通过整个截面的总电流 I 在点 P 的磁感应强度 $\vec{B}$，必沿圆周 L 的切线方向。对所选的闭合圆周 L，由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

或

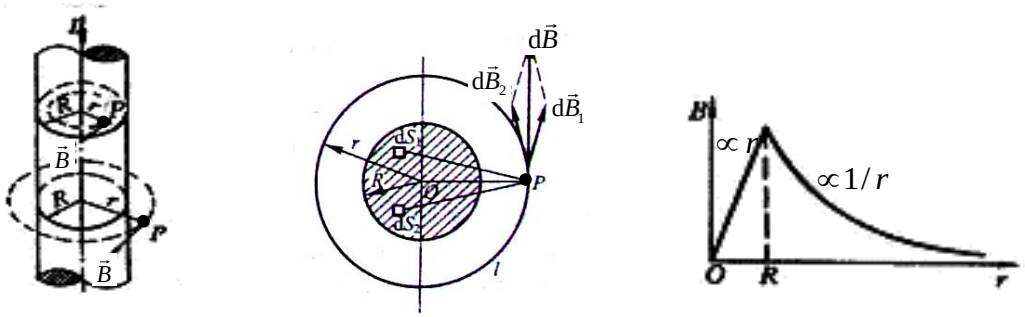
$$B=\frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

I' 表示穿过环路 L 的电流。

如果 $r<R$(点 P在导线内部)，穿过 L 的电流 $I'=\dfrac{I}{\pi R^2}\pi r^2=\dfrac{r^2}{R^2}I$，代入上式得

$$B=\frac{\mu_0 I'}{2\pi r}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} \qquad (r<R) \qquad (10\text{-}12)$$

可见在圆柱形导线内部，磁感应强度与离开轴线的距离 r 成正比。



(a) (b) (c)

图 10-23 长直圆柱形载流导线的磁场

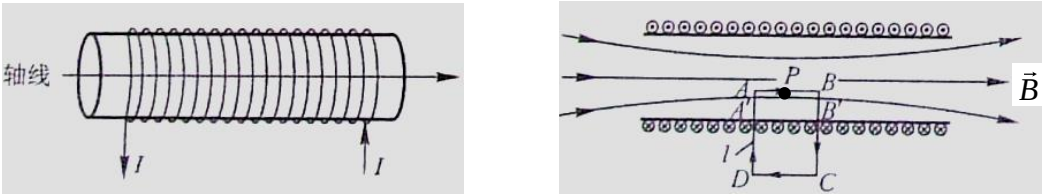
如果 $r>R$(点 P在导线外)， $I'=I$，于是有

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (r>R) \qquad (10\text{-}13)$$

上式表明，在圆柱形导线外部磁场分布与全部电流 I 集中在轴线上的长直电流所激发的磁场相同，B 与 r 成反比。图 10-23(c)给出了 B 与 r 的关系曲线。

2 载流长直螺线管内的磁场

长度远大于横截面线度的直螺线管称为“无限长”螺线管，简称长直螺线管。如图 10-24(a)所示，设长直螺线管的长度为 l，共有 N 匝线圈，且是均匀密绕，每匝通有电流 I。螺线管各匝线圈都是螺旋形的，但在均匀密绕的情况下，可以把它看作是许多匝圆形线圈紧密排列组成。根据电流分布的对称性，可确定管内的磁感应线是一系列与轴线平行的直线，而且在同一磁感应线上各点的 $\vec{B}$ 相同。在管外侧，磁场很弱，可以忽略不计。



(a) (b)

图 10-24 长直螺线管内磁场的计算

为了计算管内某点 P 的磁感应强度，可以通过 P 点作一矩形的闭合回路，如图 10-24(b)所示。在线段 CD 上，以及在线段 BC 和 DA 位于管外部分（即 $B'C$ 和 DA' 段），因为螺线管外

$\vec{B}=0$，故$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$。在 *BC* 和 *DA* 的位于管内部分（即 *BB'* 和 *A'A* 段），虽然$\vec{B}\neq 0$，但$\vec{B}$与$\mathrm{d}\vec{l}$垂直，$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$。线段 *AB* 上各点磁感应强度大小相等，取积分路径$\mathrm{d}\vec{l}$与磁感应强度$\vec{B}$的方向一致，即从 *A* 到 *B*，$\vec{B}$矢量沿闭合回路 *ABCD* 的环流为

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{AB}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{BC}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{CD}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{DA}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=B\cdot AB$$

而闭合路径所围绕的总电流为$AB\dfrac{N}{l}I$。按安培环路定理，有

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=B\cdot AB=\mu_0 AB\frac{N}{l}I$$

所以

$$B=\frac{\mu_0 NI}{l} \qquad (10\text{-}14)$$

方向按电流由右手螺旋关系决定。因为矩形回路是任意的，不论 *AB* 段在管内任何位置，上式都成立。因此长直螺线管内任一点$\vec{B}$的大小均相同，方向平行于轴线，即长直螺线管内中间部分的磁场是一个均匀磁场。

3 载流螺绕环内的磁场

绕在圆环上的螺线形线圈叫螺绕环。如图 10-25(a)所示，在密绕环形螺绕环上，线圈总匝数为 *N*，每匝线圈通有电流 *I*。环上的线圈绕得很紧密，磁场几乎全部集中在螺绕环内，环外磁场接近于零。由于对称性的缘故，环内磁场的磁感应线都是一些同心圆，圆心在通过环心垂直于环面的直线上，如图 10-25(b)所示。在同一条磁感应线上各点磁感应强度的量值相同，方向处处沿圆的切线方向，并和环面平行。

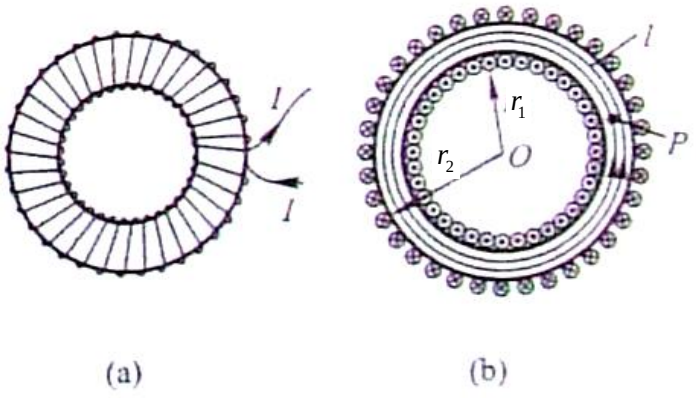


图 10-25 环形螺线管内磁场的计算

现在计算环内某一点 *P* 的磁感应强度$\vec{B}$，我们取通过该点的一条磁感应线作为闭合路径 *L*。这样，根据以上所述，有 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l=\oint_L B\cos 0^0\,\mathrm{d}l=B\oint_L \mathrm{d}l=B2\pi r$

式中 *r* 为回路半径。闭合路径所围绕的总电流为 *NI*。由安培环路定理，有

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 NI$$

计算出点 P 磁感应强度为 $$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad (10\text{-}15)$$

若环直径远大于螺绕环横截面积的线度，即当环形螺绕环的截面积很小时，管的孔径 r_2-r_1 比环的平均半径 r 小得多时，管内各点磁场强弱实际上相同。因此可以取圆环平均长度为 $l=2\pi r$，则环内各点的磁感应强度的量值为 $$B=\frac{\mu_0 NI}{l}=\mu_0 nI$$

式中 n 为螺绕环单位长度上的匝数，$\vec{B}$ 的方向与电流流向成右手螺旋关系。

例 10-2 如图 10-26 所示，一无限大导体薄平板垂直于纸面放置，其上有方向指向读者的电流，面电流密度(即通过与电流方向垂直的单位长度的电流)到处均匀，大小为 i，求其磁场分布.

解 无限大平面电流可看成是由无限多根平行排列的长直电流 $\mathrm{d}I$ 所组成. 先分析任一点 P 处磁场的方向，如图 (a)所示，在以 OP 为对称轴的两侧分别取宽度相等的长直电流 $\mathrm{d}I_1$ 和 $\mathrm{d}I_2$，则 $\mathrm{d}I_1=\mathrm{d}I_2$，故它们在 P 点产生的元磁感应强度 $d\vec{B}_1$ 和 $d\vec{B}_2$ 相叠加后的合磁场 $d\vec{B}$ 的方向一定平行于电流平面，方向向左. 由此可

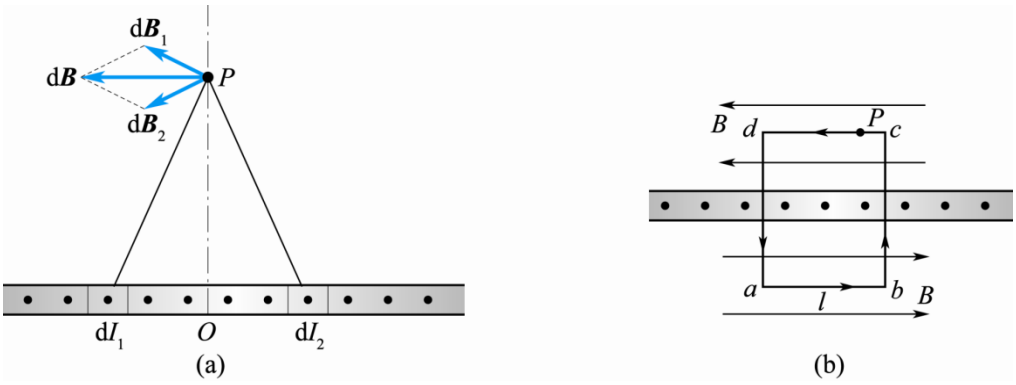


图 10-26 例 10-2 图

知，整个平面电流在 P 点产生的合磁场 B 的方向必然平行电流平面向左. 同理，电流平面的下半部空间 B 的方向为平行电流平面向右. 又由于电流平面无限大，故与电流平面等距离的各点 B 的大小相等.

根据以上所述的磁场分布的特点，过 P 点作矩形回路 $abcda$，$ab=cd=l$，如图 (b)所示，其中 ab 和 cd 两边与电流平面平行，而 bc 和 da 两边与电流平面垂直且被电流平面等分. 该回路所包围的电流为 li，由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l}+\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l}+\int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l}+\int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 li$$

于是

$$2Bl=\mu_0 li \qquad B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

这一结果说明，在无限大均匀平面电流两侧的磁场是匀强磁场，且大小相等、方向相反. 其磁感应线

在无限远处闭合，与电流亦构成右螺旋关系。

例 10-3 真空中无限长圆柱形铜导体(μ_0)，半径为R，I均匀分布， 求通过S(阴影区)的磁通量. 如图 10-27 所示.

解：面元$ds = 1dr$

取$\vec{B}$方向与$d\vec{s}$方向相同

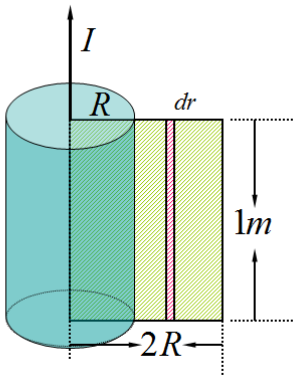


图 10-27 例 10-3 图

导体内,由安培环路定理：$\mathrm{B} = \mu_0 \dfrac{Ir}{2\pi R^2}$

$$\varphi_1 = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int B ds$$

$$= \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

导体外$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\varphi_2 = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int B ds = \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 2$$

故

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 2$$

10.3 磁场对载流导线的作用

10.3.1 安培定律

磁场对载流导线的作用力即磁力，通常称为安培力。其基本规律是安培由大量实验结果

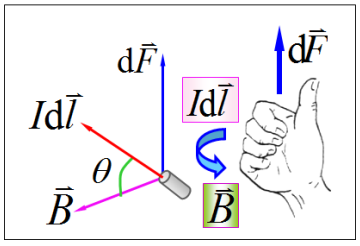


图 10-28 电流元在磁场中所受的安培力

总结出来的，故称为安培定律。内容如下：

位于磁场中某点处的电流元 $Id\vec{l}$ 将受到磁场的作用力 $d\vec{F}$. $d\vec{F}$ 的大小与电流强度 I，电流元的长度 dl，磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小以及 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角的正弦成正比。即

$$dF = kBIdl\sin\left(Id\vec{l}, \vec{B}\right)$$

$d\vec{F}$ 的方向垂直于 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 所组成的平面，指向按右螺旋法则决定。如图 10-28 所示。在国

际单位制中，$k=1$ 。则上式写成

$$dF = BIdl\sin\left(Id\vec{l},\vec{B}\right) \qquad (10\text{-}16)$$

写成矢量式

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B} \qquad (10\text{-}17)$$

计算有限长载流导线所受的安培力，等于各电流元所受安培力的矢量叠加，即

$$\vec{F} = \int_L \mathrm{d}\vec{F} = \int_L I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B} \qquad (10\text{-}18)$$

由于单独的电流元不能获取，因此无法用实验直接证明安培定律。但是用式（10-18），我们可以计算各种形状的载流导线在磁场中所受的安培力，结果都与实验相符合。

用安培定律计算载流导线在磁场中所受安培力的步骤为：

1. 根据磁场分布选取合适的电流元$I\,\mathrm{d}\vec{l}$；
2. 由安培定律给出电流元$I\,\mathrm{d}\vec{l}$所受的力$\mathrm{d}\vec{F}$，并作图表示$\mathrm{d}\vec{F}$的方向；
3. 选取坐标系，写出$\mathrm{d}\vec{F}$的分量式$\mathrm{d}F_x$、$\mathrm{d}F_y$和$\mathrm{d}F_z$；
4. 确定积分上、下限，统一积分变量后积分。

例 10-4 在磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，有一段两端点相距为 l、通有电流 I 的弯曲载流导线，（图 10-29）。试求这段导线所受的磁场力。

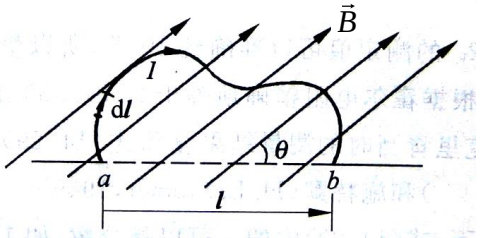


图 10-29 例 10-4 图

解 根据式（10-18），所求力为

$$\vec{F} = \int_a^b I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B} = I\left(\int_a^b \mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B}$$

此式中积分是各段矢量元$\mathrm{d}\vec{l}$ 的叠加，它是始端 a 指向 b 的矢量$\vec{l}$ 。

$$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$$

这说明整个弯曲导线受的磁场力的总和等于从起点到终点连线通过相同电流受的磁场力。在图示的情况下，$\vec{l}$ 和 $\vec{B}$ 的方向均与纸面平行，因而 $F = IlB\sin\theta$，此力的方向垂直纸面向外。

例 10-5 一长直导线 AB 载有电流 I_1，其旁放一段导线 cd 通有电流 I_2， AB 与 cd 在同一平面上且互相垂直，有

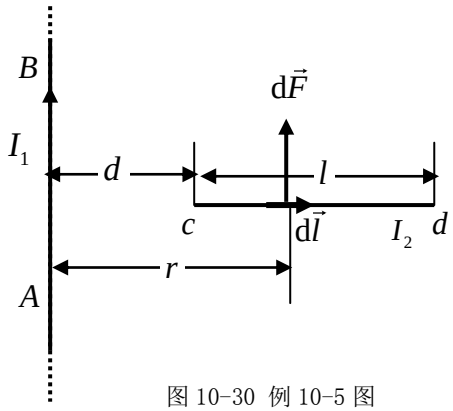


图 10-30 例 10-5 图

关尺寸如图 10-30 示，试求导线 cd 所受的磁场力。

解 *AB* 导线在周围产生的磁感应强度大小为 $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$，在 *Cd* 导线所处范围内，磁感应强度方向垂直向里。

$I_2\mathrm{d}\vec{l}$ 受力大小　　$\mathrm{d}F=I_2\mathrm{d}lB=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}r}{2\pi r}$

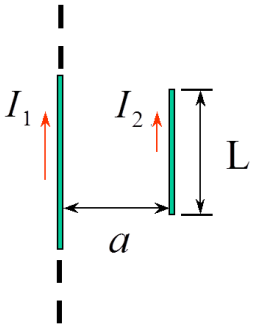
方向垂直导线向上（如图 10-30）。

Cd 导线所受磁场力大小为

$$F=\int_L \mathrm{d}F=\int_d^{d+l}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+l}{d}$$

方向垂直导线向上。

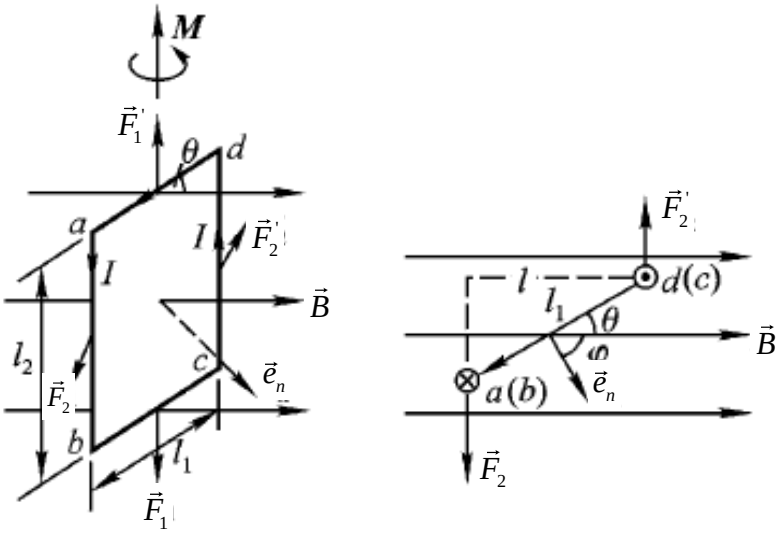
课堂训练：如图所示 长直电流 I_1 和长为 L 的电流 I_2 平行共面，相距为 a。求 I_2 受 I_1 的磁场力。



解：在电流上任取一电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$，电流 I_1 在电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$ 处磁感强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$，方向垂直纸面向里。安培力 $\mathrm{d}\vec{f}=I_2\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$，由于各电流元受力方向相同所以，合力方向指向 I_1，合力大小：$f=\int_{(I_2)}\mathrm{d}f=\int_{(I_2)}I_2\mathrm{d}lB=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$　。

10.3.2 磁场对平面载流线圈的作用

设在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，有一刚性（即不变形）的长方形平面载流线圈 *abcd*，边长分别为 l_1 和 l_2，电流强度为 I，如图 10-31 所示。设线圈的平面和磁场的方向成任意角 θ，其中 *ab* 和 *cd* 边垂直于磁场方向。根据安培定律，导线 *bc* 和 *ad* 所受磁场力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}'_1$ 的大小分别为 $F_1=BIl_1\sin\theta$，$F'_1=BIl_1\sin(\pi-\theta)=BIl_1\sin\theta$　这两个力大小相等，指向相反，分别作用在 *ad* 和 *bc* 边的中点，两者的作用线位于同一直线上，所以它们的合力为零。



(a)立体图　　(b)俯视图

图 10-31 平面载流线圈在均匀磁场中所受的力偶矩

导线 *ab* 和 *cd* 边所受的磁场力 $\vec{F}_2$ 和 $\vec{F}'_2$ 的大小相等，皆为 $F_2 = F'_2 = BIl_2$，这两个力大小相等，指向相反，但不在同一直线上，形成一力偶，其力臂为 $l = l_1\cos\theta$，因此，载流线圈受到的磁力矩为

$$M = F_2 l = F_2 l_1 \cos\theta = BIl_2 l_1 \cos\theta = BIS\cos\theta$$

式中 $S=l_1l_2$ 为线圈的面积。

考虑到线圈平面的正法线方向 $\vec{e}_n$ 和磁场方向之间的夹角 $\varphi = \pi/2 - \theta$

$$M = BIS\sin\varphi$$

如果线圈有 *N* 匝，那么线圈所受磁力矩的大小为

$$M = NBIS\sin\phi = Bm\sin\phi \qquad (10\text{-}19)$$

式中，$m = NIS$ 为载流线圈磁矩的大小。

$$\vec{m} = NI\vec{S} = NIS\vec{e}_n$$

考虑到力矩是使线圈平面的正法线方向 $\vec{e}_n$ 转向磁场方向，可以将式（10-19）写成矢量式为

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \qquad (10\text{-}20)$$

式（10-19）和式（10-20）对处于均匀磁场中的任意形状的载流平面线圈也是适用的。甚至，由于带电粒子沿闭合回路的运动，以及带电粒子的自旋所具有的磁矩，带电粒子在磁场中所受的磁力矩作用，均可用式（10-20）来描述。

下面讨论几种特殊情况：

（1）当$\vec{m}$与$\vec{B}$夹角$\varphi=\pi/2$，此时线圈平面与$\vec{B}$平行，$\vec{m}$与$\vec{B}$垂直，线圈受的磁力矩M为最大，其值为 $M=NBIS$，此时磁力矩有使φ减少的趋势。

（2）当$\vec{m}$与$\vec{B}$夹角$\varphi=0$，此时线圈平面与$\vec{B}$垂直，$\vec{m}$与$\vec{B}$同方向，线圈受的磁力矩M为零，此时线圈处于稳定平衡状态。

（3）当$\vec{m}$与$\vec{B}$夹角$\varphi=\pi$，此时线圈平面与$\vec{B}$垂直，但$\vec{m}$与$\vec{B}$反向，线圈受的磁力矩M也为零，此时线圈处于非稳定平衡位置。所谓非稳定平衡位置是指，一旦外界扰动使线圈稍稍偏离这一平衡位置，磁场对线圈的磁力矩作用就将使线圈继续偏离，直到$\vec{m}$转向$\vec{B}$的方向（即线圈达到稳定平衡状态）为止。

从上面的讨论可知，平面载流刚性线圈在均匀磁场中，由于只受磁力矩作用，因此只发生转动，而不会发生整个线圈的平动。

磁场对载流线圈作用力矩的规律是制成各种电动机和磁电式仪表的工作原理，都利用了载流线圈在磁场中受力偶矩作用而引起转动的这一特性。

例 10-6 半径为 R 的均匀带电平面圆盘，电荷面密度为σ，现以角速度ω绕垂直于盘面的中心轴AA'旋转。求（1）它的磁矩$\vec{m}$；（2）若有一外磁场$\vec{B}$，它的方向与圆盘平面平行，求外磁场作用于此盘的磁力矩的大小。

解 将此圆盘分割成无数多个细圆环。取半径为 r，宽为 dr 的一个圆环，如图 10-32 所示，此环上带电量 $\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$

当以角速度ω旋转时，相应的圆电流为 $\mathrm{d}I=\dfrac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\sigma\omega r\,\mathrm{d}r$

（1）圆电流 dI 的磁矩为 $\mathrm{d}m=\pi r^2\,\mathrm{d}I=\pi\omega\sigma r^3\,\mathrm{d}r$

各圆电流磁矩方向一致，与圆盘的轴平行，整个圆盘磁矩为

$$m=\int_0^R \mathrm{d}m=\frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4$$

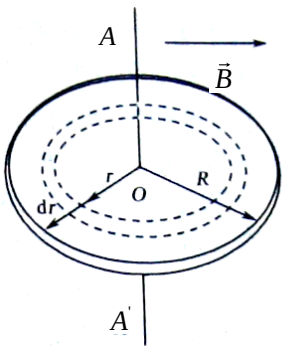


图 10-32 例 10-6 图

（2）圆电流 dI 在外磁场中受到的磁力矩为

$$\mathrm{d}M=B\,\mathrm{d}m=\pi B\omega\sigma r^3\,\mathrm{d}r$$

各圆电流所受磁力矩方向相同，整个圆盘受到的磁力矩为

$$M=\int_0^R \mathrm{d}M=\frac{1}{4}\pi B\omega\sigma R^4$$

注 由于外磁场均匀，且$\vec{m}$和$\vec{B}$互相垂直，直接可得

$$M = mB = \frac{1}{4}\pi B\omega\sigma R^4 。$$

作业：1、2、15