

第 34 讲 习题课

第 10 章 稳恒磁场

课程内容

- 10.1 磁场 磁感应强度
- 10.2 安培环路定理
- 10.3 磁场对载流导线的作用
- 10.4 磁场对运动电荷的作用
- 10.5 回旋加速器 磁聚焦
- 10.6 磁介质

教学要求

了解磁的基本现象及其电和磁的发展史；了解运动电荷的磁场；了解磁聚焦、回旋加速器、质谱仪、速度选择器、霍尔效应；了解磁场对载流线圈的作用、磁电式电流计；了解磁介质、顺磁质、抗磁质、铁磁质、顺磁质的磁化、抗磁质的磁化；分子电流、分子磁矩，磁化强度、磁化电流；了解铁磁质的特征及其特殊磁性的现代理论。

理解磁场强度、磁通量、磁场的高斯定理及其应用；毕奥—萨伐尔定律；安培环路定理推导；洛伦兹力、带电粒子在磁场中的运动；电流单位“安培”的定义；载流导线在磁场中运动时磁力所作的功、载流线圈在磁场中转动时磁力所作的功；有磁介质时的安培环路定理、磁场强度、 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 关系。

掌握安培环路定理，熟练地应用安培环路定理解决问题，掌握安培定律及其应用。

重点与难点

重点：安培环路定理及应用，安培定律及其应用。

难点：毕奥—萨伐尔定律及应用，有磁介质时的安培环路定理。

10.1 磁场 磁感应强度

10.1.1 基本磁现象

10.1.2 磁感应强度

电流(或磁铁) \longleftrightarrow 磁场 \longleftrightarrow 电流(或磁铁)

磁场和电场一样，是客观存在的特殊形态的物质，磁场对外的重要表现是：

- (1) 磁场对进入场中的运动电荷或载流导体有磁力的作用

(2) 载流导体在磁场中移动时，磁场的作用力对载流导体做功，表明磁场具有能量。

定义试验线圈的磁矩(多匝线圈还要乘以线圈匝数), 即

$$\vec{m} = I\Delta S\vec{n} \quad (10-1)$$

磁矩 \vec{m} 是矢量, 其方向与线圈的法线方向一致, \vec{n} 表示沿法线方向的单位矢量. 法线与电流流向成右螺旋系, 如图 10-4 所示。显然线圈的磁矩是表征线圈本身特性的物理量。

定义磁感应强度的大小为

$$B = \frac{M_{\max}}{m} \quad (10-2)$$

综上所述, 磁场中某点处磁感应强度的方向与该点处试验线圈在稳定平衡位置时的法线方向相同; 磁感应强度的量值等于具有单位磁矩的试验线圈所受到的最大磁力矩。

磁感应强度的国际制单位为: 1 特斯拉 = 1 牛·秒/库·米。工程上还常用高斯作为磁感应强度的单位, 1 特斯拉 = 10^4 高斯 (1T = 10^4 GS)

10.1.3 磁通量

1 磁感线 (磁力线, B 线)

磁感线的特性如下:

(1) 磁感线是环绕电流的闭合曲线, 而且每条闭合磁感线都与闭合电路互相套合, 因此磁场是涡旋场。

(2) 任何两条磁感线在空间不相交, 这是因为磁场中任一点的磁场方向都是唯一确定的。

(3) 磁感线的环绕方向与电流方向之间遵守右螺旋法则。若拇指指向电流方向, 则四指方向即为磁感线方向, 如图 10-5 (a) 所示; 若四指方向为电流方向, 则拇指方向为磁感线方向, 如图 10-5 (b) 和图 10-5 (c) 所示。

2 磁通量

通过面积元 $d\vec{S}$ 的磁通量为 $d\Phi_M = B \cos \theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$

通过曲面 S 的磁通量为 $\Phi_M = \int d\Phi_M = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ (10-3)

磁通量和电通量的计算方法完全类似。磁通量的国际制单位为：韦伯 (Wb)，
 $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$ 。

10.1.4 磁场中的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (10-4)$$

上式称为**磁场的高斯定理**。

10.1.5 毕奥—萨伐尔定律

毕奥—萨伐尔定律：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (10-7a)$$

任意形状的载流导线在给定点 P 产生的磁感应强度，等于各段电流元在该点产生的磁场的矢量和，即

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (10-7b)$$

10.1.6 毕奥—萨伐尔定律的应用

应用毕奥—萨伐尔定律和磁场叠加原理计算磁感应强度的步骤大致为：

- (1) 选择合适的电流元 $Id\vec{l}$ 。
- (2) 按照毕奥—萨伐尔定律写出电流元 $Id\vec{l}$ 在场点 P 的磁感应强度 $d\vec{B}$ ，并作图表示 $d\vec{B}$ 的方向。
- (3) 选择合适的坐标系，将 $d\vec{B}$ 分解到各坐标轴上，从而把矢量积分变为标量积分。
- (4) 如果积分变量不止一个，利用各变量之间的关系，统一为一个变量，然后确定积分上、下限积分。

1 载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

式中 α_1 和 α_2 分别是直导线两端的电流元和它们到 P 点的径矢之夹角。如果载流直导线为“无限长”，即导线的长度 L 比垂直距离为 a 大得多，那么 $\alpha_1 \rightarrow 0$ ， $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ，得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (10-9)$$

方向与电流 I 流向成右手螺旋系，如图 10-12 所示。如果 P 点在 L 的延长线上时， $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 或 π 时，则 $B = 0$ 。

2 圆形电流轴线上的磁场

$$\begin{aligned} B &= \int dB_{//} = \int dB \sin \theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \frac{R}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(1) 当 $x = 0$ ，即在圆心处，磁感应强度大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ 或 $B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$ 。如果载流导线为一段圆心角为 θ 的圆弧，则圆心处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \quad (10-10)$$

(2) 如果用矢量式表示圆电流轴线上的磁场，由于它的方向与圆电流磁矩 \vec{m} 的方向相同，所以可写成

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 当 $x \gg R$ ，有 $B = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}$

当圆电流的面积 S 很小，或者场点距圆电流很远时，把圆电流叫做磁偶极子。式中的 \vec{B} 为磁偶极子在极轴上产生的磁感应强度。

10.2 安培环路定理

10.2.1 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos 0^\circ dl = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = \mu_0 I$$

上式表明，在稳恒磁场中，磁感应强度 \vec{B} 沿闭合路径的环流 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ，等于此闭合路径所

包围的电流与真空磁导率的乘积。

电流正负的规定：若电流流向与积分回路的绕行方向满足右手螺旋关系，电流取正值；反之，电流就取作负值。

在一般情况下，如果我们所选取的闭合路径围绕着不只一个电流，进一步的研究指出：在真空中的稳恒电流磁场中，磁感应强度 \vec{B} 沿任意闭合曲线 L 的线积分（也称 \vec{B} 矢量的环流），等于穿过这个闭合曲线的所有电流强度（即穿过以闭合曲线为边界的任意曲面的电流强度）的代数和的 μ_0 倍。这个结论称为**安培环路定理**。它的数学表达式是

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (10-11)$$

讨论 1. 安培环路定理表达式中右端的 $\sum_i I_i$ 仅为闭合路径所包围的电流的代数和，但式左端的 \vec{B} 却为空间所有的电流产生的磁感应强度的矢量和，其中也包括了那些未被 L 所包围的电流所产生的磁场，只不过后者的磁场对此闭合路径的环流无贡献。当闭合路径不包围电流，或闭合路径所包围的电流的代数和为零时，则 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ，但这并不意味着闭合路径上每一点的 \vec{B} 都为零。

2. 特别要注意**闭合路径 L “包围” 电流的含义**：只有与 L 互相“套链”的电流，才算被 L 包围的电流。在图 10-21 中，电流 I_1 、 I_2 被回路 L 所包围，且 I_1 为正， I_2 为负； I_3 和 I_4 没有被 L 包围，它们对 \vec{B} 沿 L 的环流无贡献，但对 \vec{B} 有贡献。

3. 安培环路定理中的电流指的是闭合稳恒电流，对于任意设想的一段载流导线的磁场则不成立。

10.2.2 安培环路定理的应用

利用安培环路定理求磁场分布一般思路：首先依据电流的对称性分析磁场分布的对称性，然后再根据定理计算磁感应强度的数值和方向。此过程中决定性的技巧是选取合适的闭合路径 L （也称**安培环路**），以便使积分 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 中的 \vec{B} 能从积分号内提出来。

10.3 磁场对载流导线的作用

10.3.1 安培定律

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (10-17)$$

计算有限长载流导线所受的安培力，等于各电流元所受安培力的矢量叠加，即

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (10-18)$$

用安培定律计算载流导线在磁场中所受安培力的步骤为：

1. 根据磁场分布选取合适的电流元 $I d\vec{l}$ ；
2. 由安培定律给出电流元 $I d\vec{l}$ 所受的力 $d\vec{F}$ ，并作图表示 $d\vec{F}$ 的方向；
3. 选取坐标系，写出 $d\vec{F}$ 的分量式 dF_x 、 dF_y 和 dF_z ；
4. 确定积分上、下限，统一积分变量后积分。

10.3.2 磁场对平面载流线圈的作用

载流线圈受到的磁力矩为

$$M = F_2 l = F_2 l_1 \cos \theta = B l_2 l_1 \cos \theta = B I S \cos \theta$$

式中 $S=l_1 l_2$ 为线圈的面积。

考虑到线圈平面的正法线方向 \vec{e}_n 和磁场方向之间的夹角 $\varphi = \pi/2 - \theta$

$$M = B I S \sin \varphi$$

如果线圈有 N 匝，那么线圈所受磁力矩的大小为

$$M = N B I S \sin \varphi = B m \sin \varphi \quad (10-19)$$

式中， $m = N I S$ 为载流线圈磁矩的大小。

$$\vec{m} = N I \vec{S} = N I S \vec{e}_n$$

考虑到力矩是使线圈平面的正法线方向 \vec{e}_n 转向磁场方向，可以将式 (10-19) 写成矢量式为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (10-20)$$

下面讨论几种特殊情况：

(1) 当 \vec{m} 与 \vec{B} 夹角 $\varphi = \pi/2$ ，此时线圈平面与 \vec{B} 平行， \vec{m} 与 \vec{B} 垂直，线圈受的磁力矩 M 为最大，其值为 $M = N B I S$ ，此时磁力矩有使 φ 减少的趋势。

(2) 当 \vec{m} 与 \vec{B} 夹角 $\varphi = 0$ ，此时线圈平面与 \vec{B} 垂直， \vec{m} 与 \vec{B} 同方向，线圈受的磁力矩 M 为零，此时线圈处于稳定平衡状态。

(3) 当 \vec{m} 与 \vec{B} 夹角 $\varphi = \pi$, 此时线圈平面与 \vec{B} 垂直, 但 \vec{m} 与 \vec{B} 反向, 线圈受的磁力矩 M 也为零, 此时线圈处于非稳定平衡位置。所谓非稳定平衡位置是指, 一旦外界扰动使线圈稍稍偏离这一平衡位置, 磁场对线圈的磁力矩作用就将使线圈继续偏离, 直到 \vec{m} 转向 \vec{B} 的方向 (即线圈达到稳定平衡状态) 为止。

10.3.3 磁力的功

载流导线或载流线圈在磁场中运动时, 其所受的磁力或磁力矩将对它们做功。

1 载流导线在磁场中运动时磁力所做的功

磁力 \vec{F} 所做的功为

$$W = F\Delta x = BIl\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi \quad (10-21)$$

上式说明, 当载流导线在匀强磁场中运动时, 如果电流保持不变, 磁力的功等于电流强度乘以回路所环绕面积内磁通量的增量。

2 载流线圈在磁场中转动时磁力矩所做的功

$$\begin{aligned} dW &= -Md\varphi = -BIS \sin\varphi d\varphi \\ &= BISd(\cos\varphi) = Id(BS \cos\varphi) = Id\Phi \end{aligned} \quad (10-22)$$

当上述线圈从 φ_1 转到 φ_2 的过程中, 维持线圈内电流不变, 则磁力矩所做的总功为

$$W = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} Id\Phi = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m \quad (10-23)$$

式中 Φ_{m1} 和 Φ_{m2} 分别表示线圈在 φ_1 和 φ_2 时, 通过线圈的磁通量。

10.4 磁场对运动电荷的作用

10.4.1 洛仑兹力

洛仑兹力的矢量表达式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (10-25)$$

式中 q 的正负决定于粒子所带电荷的正负。由式 (10-25) 可以看出, 洛仑兹力 \vec{F}_m 总是与带电粒子运动速度 \vec{v} 的方向垂直, 即有 $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$, 因此洛仑兹力不能改变运动电荷速度的大小, 只能改变速度的方向, 使带电粒子的运动路径弯曲。

带电粒子若在既有电场又有磁场的区域里运动，作用在带电粒子上的力

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (10-26)$$

式(10-26)通常叫做洛仑兹关系式。

10.4.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

(1) \vec{v}_0 与 \vec{B} 相互平行

当带电粒子的速度 \vec{v}_0 与 \vec{B} 相互平行时，作用于带电粒子的洛仑兹力等于零，由式

(10-27)可知， $\vec{v} = \vec{v}_0$ ，带电粒子不受磁场的影响，进入磁场后作匀速直线运动。

(2) \vec{v}_0 与 \vec{B} 垂直

$$qv_0B = m\frac{v_0^2}{R}$$

得圆周运动的半径为

$$R = \frac{mv_0}{qB} \quad (10-28)$$

由式(10-28)可知，对于一定的带电粒子（即 $\frac{q}{m}$ 一定），当它在均匀磁场中运动时，其圆周运动的半径与速度成正比。

由式(10-28)还可求得粒子在圆周轨道上绕行一周所需的时间（即周期）为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (10-29)$$

T的倒数即粒子在单位时间内绕圆周轨道转过的圈数，称为带电粒子的回旋频率，用 ν 表示为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (10-30)$$

式(10-29)和式(10-30)表明，带电粒子在垂直于磁场方向的平面内作圆周运动时，其周期T和回旋频率 ν 只与磁感应强度 \vec{B} 及粒子本身的质量 m 和所带的电量 q 有关，而与粒子的速度及回旋半径无关。

(3) 如果 \vec{v}_0 与 \vec{B} 成任意角 θ

$$R = \frac{m v_{\perp}}{qB} = \frac{m v_0 \sin \theta}{qB}$$

其螺距为

$$h = v_0 \cos \theta \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \theta \quad (10-31)$$

10.4.3 霍尔效应

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d} \quad (10-33)$$

10.6 磁介质

10.6.1 磁介质的分类

10.6.2 磁介质的磁化

10.6.3 磁场强度 \vec{H} 及其环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad (10-38)$$

此式的意义是：在有介质的磁场中，磁场强度沿任意闭合路径的线积分等于该闭合路径所包围的传导电流的代数和。此即 \vec{H} 的环路定理。

讨论 1. 式 (10-38) 虽然是就无限大均匀磁介质的特殊情况导出的，但可以说明对于磁介质的一般分布情形，仍是普遍成立的。

2. 引入 \vec{H} 实用上的意义在于其环流只与传导电流有关，帮助避开无法测量的磁化电流，而传导电流是可以测量的，这样在磁场具有高度对称性时，可以先由 \vec{H} 环路定理求出 \vec{H} ，然后再由 \vec{B} 和 \vec{H} 的关系式 (10-37) 求出 \vec{B} 。

3. 磁场强度 \vec{H} 是描述磁场性质的辅助物理量，磁感应强度 \vec{B} 是描述磁场性质的基本物理量。

4. $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$ 仅对电流与磁介质具有特殊对称性情况 (如无限大均匀磁介质分布、无限长柱对称分布、长直密绕螺线管内部、密绕螺绕环内部等) 才成立，而 \vec{B} 和 \vec{H} 的关系 [式

(10-37)] 是普遍成立的。

10.6.4 铁磁质

铁磁质常用于电机、电器设备、电子器件。它有如下特性：

1. 铁磁质在外磁场作用下，能产生很大的与外磁场同向的附加磁感应强度。即**铁磁质具有很大的磁导率 μ** 。高 μ 值铁磁质有广泛的用途。在产生强磁场的装置中，几乎都采用这种铁磁材料。

2. 铁磁质中的磁感应强度 \vec{B} 和磁场强度 \vec{H} 不是简单的正比关系。或者说，**铁磁质的磁导率 μ 不是常数**，而是随铁磁质中的 \vec{H} 的不同而变化。当 \vec{H} 的值不很大时，磁感应强度 \vec{B} 的大小随 \vec{H} 的增大而迅速增大；当 \vec{H} 增大到一定程度时， \vec{B} 的增大趋势明显地变缓以至于不再增大。这种现象称为**磁饱和**。

3. 在外磁场消失后。铁磁质内部仍将保留部分磁性，这称为铁磁质的**剩磁**现象。欲消除铁磁质中的剩磁，可以给铁磁质加反向磁场。随着反向磁场强度的增大，剩磁开始减小。当反向磁场强度达到某个数值时，剩磁全部消失，把这时的反向磁场强度称为**矫顽力**。反向磁场强度继续增大时，铁磁质将开始反向磁化。

4. 每种铁磁质各有一临界温度，称为**居里点**。当温度超过居里点时，铁磁质的铁磁性立即消失而变为普通的顺磁质。

例 1 填空题

(1) 边长为 a 的正方形导线回路载有电流为 I ，则其中心处的磁感应强度_____。

[答案： $\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$ ，方向垂直正方形平面]

(2) 计算有限的直线电流产生的磁场_____用毕奥——萨伐尔定律，而_____用安培环路定理求得（填能或不能）。

[答案：能，不能]

(3) 电荷在静电场中沿任一闭合曲线移动一周，电场力做功为_____。电荷在磁场中沿任一闭合曲线移动一周，磁场力做功为_____。

[答案：零，正或负或零]

(4) 两个大小相同的螺线管一个有铁心一个没有铁心，当给两个螺线管通以_____电流时，管内的磁力线 \mathbf{H} 分布相同，当把两螺线管放在同一介质中，管内的磁力线 \mathbf{H} 分布将_____。

[答案：相同，相同]

例 2 选择题

(1) 对于安培环路定理的理解, 正确的是:

- (A) 若环流等于零, 则在回路 L 上必定是 H 处处为零;
- (B) 若环流等于零, 则在回路 L 上必定不包围电流;
- (C) 若环流等于零, 则在回路 L 所包围传导电流的代数和为零;
- (D) 回路 L 上各点的 H 仅与回路 L 包围的电流有关。

[答案: C]

(2) 对半径为 R 载流为 I 的无限长直圆柱体, 距轴线 r 处的磁感应强度 B ()

- (A) 内外部磁感应强度 B 都与 r 成正比;
- (B) 内部磁感应强度 B 与 r 成正比, 外部磁感应强度 B 与 r 成反比;
- (C) 内外部磁感应强度 B 都与 r 成反比;
- (D) 内部磁感应强度 B 与 r 成反比, 外部磁感应强度 B 与 r 成正比。

[答案: B]

(3) 质量为 m 电量为 q 的粒子, 以速率 v 与均匀磁场 B 成 θ 角射入磁场, 轨迹为一螺旋线, 若要增大螺距则要 ()

- (A) 增加磁场 B; (B) 减少磁场 B;
- (C) 增加 θ 角; (D) 减少速率 v。

[答案: B]

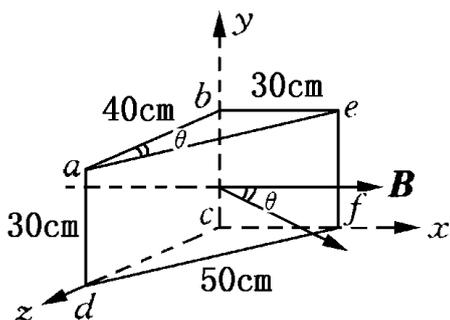
(4) 一个 100 匝的圆形线圈, 半径为 5 厘米, 通过电流为 0.1 安, 当线圈在 1.5T 的磁场中从 $\theta = 0$ 的位置转到 180 度 (θ 为磁场方向和线圈磁矩方向的夹角) 时磁场力做功为 ()

- (A) -0.24J; (B) 2.4J; (C) -0.14J; (D) 14J。

[答案: A]

例 3 已知磁感应强度 $B = 2.0 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ 的均匀磁场, 方向沿 x 轴正方向, 如题 3 图所示. 试求: (1) 通过图中 $abcd$ 面的磁通量; (2) 通过图中 $befc$ 面的磁通量; (3) 通过图中 $aefd$ 面的磁通量.

解: 如题 3 图所示



题 3 图

(1) 通过 $abcd$ 面积 S_1 的磁通是

$$\Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = -2.0 \times 0.3 \times 0.4 = -0.24 \text{ Wb}$$

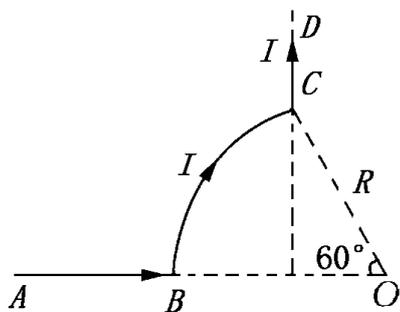
(2) 通过 $befc$ 面积 S_2 的磁通量

$$\Phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S}_2 = 0$$

(3) 通过 $aefd$ 面积 S_3 的磁通量

$$\Phi_3 = \vec{B} \cdot \vec{S}_3 = 2 \times 0.3 \times 0.5 \times \cos \theta = 2 \times 0.3 \times 0.5 \times \frac{4}{5} = 0.24 \text{ Wb}$$

例 4 如题 4 图所示, AB 、 CD 为长直导线, \widehat{BC} 为圆心在 O 点的一段圆弧形导线, 其半径为 R . 若通以电流 I , 求 O 点的磁感应强度.



题 4 图

解: 如题 4 图所示, O 点磁场由 AB 、 \widehat{BC} 、 CD 三部分电流产生. 其中

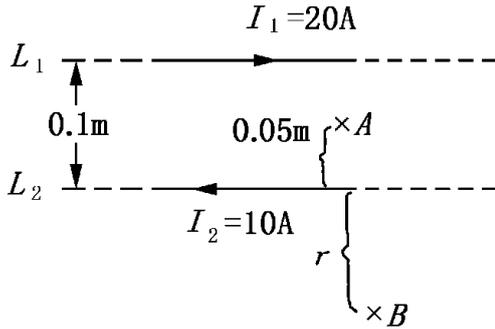
$$AB \text{ 产生 } \vec{B}_1 = 0$$

$$\widehat{BC} \text{ 产生 } B_2 = \frac{\mu_0 I}{12R}, \text{ 方向垂直向里}$$

$$CD \text{ 段产生 } B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}), \text{ 方向 } \perp \text{ 向里}$$

$$\therefore B_0 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 方向 } \perp \text{ 向里.}$$

例 5 在真空中, 有两根互相平行的无限长直导线 L_1 和 L_2 , 相距 0.10m, 通有方向相反的电流, $I_1=20\text{A}$, $I_2=10\text{A}$, 如题 5 图所示. A , B 两点与导线在同一平面内. 这两点与导线 L_2 的距离均为 5.0cm. 试求 A , B 两点处的磁感应强度, 以及磁感应强度为零的点的位置.



题 5 图

解: 如题 5 图所示, \vec{B}_A 方向垂直纸面向里

$$\begin{aligned} B_A &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.1 - 0.05)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0.05} + \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.05} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_B &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.1 + 0.05)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0.15} - \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.05} = -1.3 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

\vec{B}_B 方向垂直纸面向外

(2) 设 $\vec{B} = 0$ 在 L_2 外侧距离 L_2 为 r 处

$$\text{则 } \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r + 0.1)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = 0$$

$$\text{解得 } r = 0.1 \text{ m}$$

例 6 在霍尔效应实验中, 一宽 1.0cm, 长 4.0cm, 厚 $1.0 \times 10^{-3}\text{cm}$ 的导体, 沿长度方向载有 3.0A 的电流, 当磁感应强度大小为 $B = 1.5\text{T}$ 的磁场垂直地通过该导体时, 产生 $1.0 \times 10^{-5}\text{V}$ 的横向电压. 试求:

(1) 载流子的漂移速度;

(2) 每立方米的载流子数目.

(3) 假设载流子是电子, 试就一给定的电流和磁场方向在图上画出霍尔电压的极性.

解: (1) $\because eE_H = evB$

$$\therefore v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{lB} \quad l \text{ 为导体宽度, } l = 1.0 \text{ cm}$$

$$\therefore v = \frac{U_H}{lB} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{10^{-2} \times 1.5} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) $\because I = nevS$

$$\therefore n = \frac{I}{evS}$$

$$= \frac{3}{1.6 \times 10^{-19} \times 6.7 \times 10^{-4} \times 10^{-2} \times 10^{-5}}$$

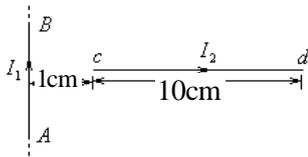
$$= 2.8 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

(3)

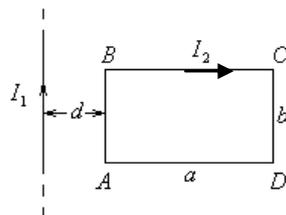
例 7 如题7图所示, 一长直导线 AB 载有电流 $I_1=20\text{A}$, 其旁放一段导线 cd 通有电流

$I_2=10\text{A}$, 且 AB 与 cd 在同一平面上且互相垂直, 有关尺寸如图所示, 试求导线 cd 所受的

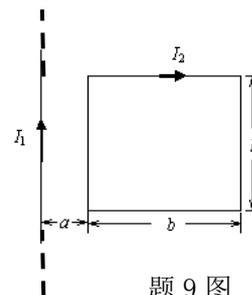
磁场力。



题 7 图



题 8 图



题 9 图

解: 在 cd 上取 $d\vec{r}$, 它受力

$$d\vec{F} \perp \vec{cd} \text{ 向上, 大小为 } dF = I_2 dr \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{0.01}^{0.11} dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{0.01}^{0.11} \frac{dr}{r} \\
 &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 20}{2\pi} \times \ln \frac{0.11}{0.01} = 9.59 \times 10^{-5} \text{ N}
 \end{aligned}$$

例 8 无限长载流直导线通有电流 I_1 ，旁有一长为 a ，宽为 b 的矩形线框 $ABCD$ 通以电流 I_2 ，与直导线共面， AB 边与直导线平行。有关尺寸如题8图。求 $ABCD$ 四条边所受的力的大小和方向。

解：(1) \vec{F}_{AB} 方向垂直 AB 向左，大小

$$F_{AB} = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \text{ N}$$

同理 \vec{F}_{CD} 方向垂直 CD 向右，大小

$$F_{CD} = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} \text{ N}$$

\vec{F}_{BC} 方向垂直 BC 向上，大小为

$$F_{BC} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \text{ N}$$

\vec{F}_{DA} 方向垂直 DA 向下，大小为

$$F_{DA} = F_{BC} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \text{ N}$$

例 9 如题9图所示，在长直导线旁有一矩形线圈与导线共面。导线中通有电流 $I_1=20\text{A}$ ，线圈中通有电流 $I_2=10\text{A}$ 。求矩形线圈受到的合力。已知 $a=1\text{cm}$ ， $b=9\text{cm}$ ， $l=20\text{cm}$ 。

解：(1) $\vec{F}_{\text{左}}$ 方向垂直左边导线向左，大小

$$F_{CD} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{10 \times 0.20 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0.01} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ N}$$

同理 $\vec{F}_{\text{右}}$ 方向垂直右边导线向右，大小

$$F_{\text{右}} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(b+a)} = \frac{10 \times 0.200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi(0.01+0.09)} = 8.0 \times 10^{-5} \text{ N}$$

$\vec{F}_{\text{上}}$ 方向垂直上边导线向上，大小为

$$F_{\text{上}} = \int_a^{b+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a}$$

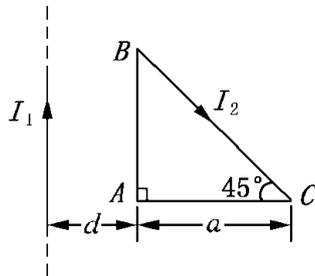
$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 20}{2\pi} \ln \frac{0.01+0.09}{0.01} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}$$

$\vec{F}_{\text{下}}$ 方向垂直边导线向下，大小为

$$F_{\text{下}} = F_{\text{上}} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}$$

(2) 合力 $\vec{F} = \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{FE} + \vec{F}_{CF} + \vec{F}_{ED}$ 方向向左，大小为 $F = 7.2 \times 10^{-4} \text{ N}$

例 10 如题10图所示，长直电流 I_1 附近有一等腰直角三角形线框，通以电流 I_2 ，二者共面。求 $\triangle ABC$ 的各边所受的磁力。



题 10 图

解:
$$\vec{F}_{AB} = \int_B^A I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F_{AB} = I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d} \quad \text{方向垂直 } AB \text{ 向左}$$

$$\vec{F}_{AC} = \int_A^C I_2 d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{方向垂直 } AC \text{ 向下，大小为}$$

$$F_{AC} = \int_d^{d+a} I_2 dr \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

同理 \vec{F}_{BC} 方向垂直 BC 向上，大小

$$F_{BC} = \int_d^{d+a} I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\therefore dl = \frac{dr}{\cos 45^\circ}$$

$$\therefore F_{BC} = \int_a^{d+a} \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r \cos 45^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

作业: 6、14、20