

第 36 讲 感生电动势 自感应与互感应

了教学要求:

了解电子感应加速器、涡电流产生的原因、合理利用涡电流和减小涡电流的危害;了解耦合因数。

理解感生电场及其性质;自感现象、自感电动势及其计算、自感系数及其计算、互感现象、互感电动势及其计算、互感系数及其计算。磁场的能量密度及其计算。

重点与难点:

重点: 感生电动势计算。

难点: 感生电场及其性质, 涡电流。

11. 2. 2 感生电动势

如上所述, 导体在磁场中运动产生动生电动势, 其非静电力是洛仑兹力。在因磁场变化而产生感生电动势的情况下, 导体回路未动, 非静电力不可能是洛仑兹力。然而人们发现, 不论回路的形状及导体的性质和温度如何, 只要磁场变化导致穿过回路的磁通量发生了变化, 就会有数值等于 $\frac{d\Phi_M}{dt}$ 的感生电动势在回路上产生。那么产生感生电动势的非静电力是什么力呢? 麦克斯韦在分析了一些电磁感应现象以后, 提出: 变化的磁场能够在其周围空间激发一种新的电场, 这种电场叫感生电场或涡旋电场, 感生电场的场强用 $\vec{E}_i$ 表示。正是由于感生电场的存在, 才在回路或导体中产生感生电动势。

涡旋电场与静电场的共同点是: 它们都是一种客观存在的物质, 它们对电荷都有作用力, 所以都称为电场。涡旋电场与静电场的不同之处在于, 涡旋电场不是由电荷激发, 而是由变化的磁场激发的, 是无源有旋场。两者产生的原因不同, 性质也不同。表 11-1 给出两种电场性质的比较。在回路中产生感生电动势的非静电力正是这一旋场电场力, 即

表 11-1 感生电场与静电场的性质比较

	静电场		感生电场
成因	静止的电荷		变化的磁场
场的性质	相同	两种电场对放入其中的电荷都有作用力	
	相异	电场线起始于正电荷, 终止于负电荷	电场线是闭合的

质		$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ 有源场	$\oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$ 无源场
		$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 保守场(无旋场)	$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 非保守场(有旋场)
		不能在导体内产生持续的电流	可以在导体内产生感生电动势和电流

$$\epsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (11-8)$$

因为对 L 围成的面积 S ，磁通量 $\Phi_M = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ，而这里 $\frac{d\Phi_M}{dt}$ 中只计及磁场 $\vec{B}$ 的变化，也

即闭合回路 L 不动，所以感生电动势为

$$\epsilon_i = - \frac{d\Phi_M}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11-9)$$

由式 (11-8)、(11-9) 得

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11-10)$$

式(11-9)中 S 表示以回路 L 为边界的任一曲面的面积，是麦克斯韦方程组的基本方程之一。此式表明感生电场的场强沿任意闭合曲线的线积分等于以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化率的负值。

注意 1 式(11-10)明确反映出变化的磁场能激发

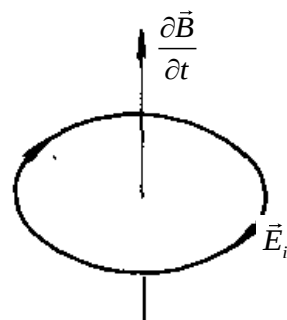


图 11-13 $\vec{E}_i$ 线和 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成左手螺旋关系

电场。感生电场的存在与是否有导体回路无关。如果有导体回路存在，感生电场的作用驱使导体中的电荷作定向运动，从而显示出感应电流；如果不存在导体回路，就没有感应电流，但是变化的磁场所激发的电场还是客观存在的。

2 规定面元 $d\vec{S}$ 的正法线方向与回路绕行正方向成右手螺旋关系，式(11-10)中的负号给出 $\vec{E}_i$ 线的绕行方向和所围的 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的方向成**左螺旋关系**(图 11-13)。

3 对非闭合回路，若磁场在空间分布具有对称性，可利用式 (11-10) 先求出 $\vec{E}_i$ 的空间分布，然后再由 $\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ 计算。有时也可通过添加辅助线构成闭合回路，利用式(11-8)计算。

4 感应电动势的两种计算公式：一般情况下，磁场在空间的分布是随时间变化，同时导体回路或导体又相对于磁场运动，这时可以通过两种方法计算感应电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

$$\varepsilon_i = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (11-11)$$

例 11-6 均匀磁场 $\vec{B}$ 被局限在半径为 R 的圆筒内， $\vec{B}$ 与筒轴平行， $\frac{dB}{dt} > 0$ ，求筒内外感生电场 $\vec{E}_i$ 的分布。

解：根据磁场分布的轴对称性可知，感生电场的电场线在圆柱内外都是与圆柱同轴的同心圆，且 $\vec{E}_i$ 处处与圆线相切，在同一条电场线上， $\vec{E}_i$ 的大小相同（如图 11-14）。过圆柱内任一点 M 在截面上作半径为 r

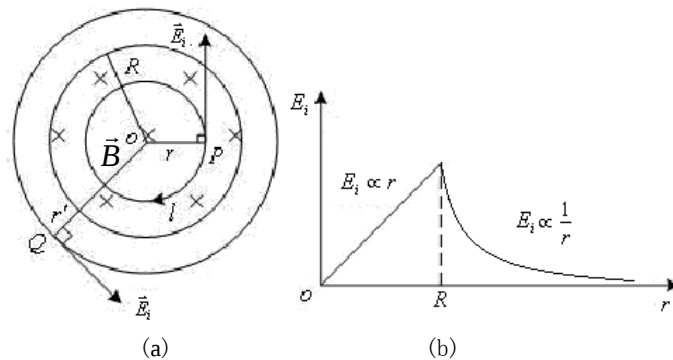


图 11-14 例 11-6 图

的圆形回路 L , 回路的绕行方向与 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 的方向构成右手螺旋关系, 即设图中沿回路的顺时针切线方向为 $\vec{E}_i$ 的正方向。

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \oint_L E_i dl = E_i \cdot 2\pi r = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_i = - \frac{1}{2\pi r} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(1) 当 $r < R$, 即所考察的点在筒内 $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$

由此 $\vec{E}_i = - \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$

(2) 当 $r > R$, 即所考察的点在筒外 $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$ $E_i = - \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$

因为 $\frac{dB}{dt} > 0$, 所以 $E_i < 0$, 圆筒内外 $\vec{E}_i$ 的方向如图 11-14(a) 所示 (用楞次定律可直接判断出电场线的绕行方向)。

图 11-14(b) 给出 E_i 随离轴线距离 r 的变化曲线。

例 11-7 在半径为 R 的圆柱形体积内充满磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场且方向垂直纸面向内, 有一长为

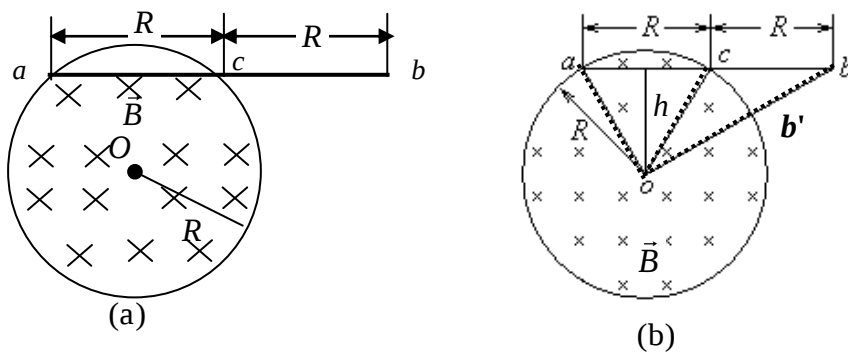


图 11-15 例 11-7 图

$2R$ 的金属棒放在磁场中, 如图 11-15(a) 所示。棒的一半在磁场内, 另一半在磁场外 ($ac=cb$), 设 $\frac{dB}{dt} > 0$ 且

为已知, 求棒两端的电势差。

解 如图 11-15(b) 所示增加 oa 和 ob , 构成取闭合回路 $oacbo$,

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_{oa} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \int_{acb} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \int_{bo} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

因在 oa 、 bo 段上, $\vec{E}_i \perp d\vec{l}$, 积分值为零, 故 $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_{acb} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{ab}$

而上述的闭合回路内的磁通量变化仅在三角形 Δoac 及扇形 ocb' 区域内, 故有

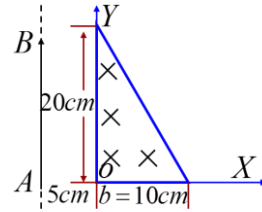
$$\varepsilon_i = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -\frac{dB}{dt} \iint_s ds = -\frac{dB}{dt} \left(\frac{1}{2} Rh + \pi R^2 \frac{30}{360} \right) = -\frac{dB}{dt} R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right)$$

负号表明电动势方向为由 b 指向 a 。

棒两端的电势差

$$U_{ab} = \frac{dB}{dt} R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right)$$

课堂训练: 如图所示, 长直导线 AB 中的 I 沿导线向上, 并且以 $\frac{dI}{dt} = 2(\text{A/S})$ 的变化率均匀增长, 导线附近放一个与之共面的直角三角形线框, 其一边与导线平行, 尺寸如图所示。求感应电动势的大小和方向。



解: 取如图所示的坐标, 线框斜边方程为: $y = -2x + 0.2$

$$\begin{aligned} \text{则三角形中的磁通量为: } \Phi &= \int_0^b \frac{\mu_0 I y dx}{2\pi(x+0.05)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b \frac{-2x+0.2}{x+0.05} dx \\ &= -\frac{\mu_0 I b}{\pi} + \frac{0.15\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{0.1+0.05}{0.05} = 2.59 \times 10^{-8} I \\ \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -2.59 \times 10^{-8} \frac{dI}{dt} = -5.18 \times 10^{-8} \text{ V} \end{aligned}$$

11. 3 电子感应加速器 涡电流

11. 3. 1 电子感应加速器

作为感生电动势的一个重要应用, 我们讨论电子感应加速器, 它的结构如图 11-16, 在电磁铁的两磁极间放置一个环形真空室。电磁铁线圈中通以交变电流, 在两磁极间产生交变磁场, 交变磁场又在真空室内激发涡旋电场。电子由电子枪注入环形真空室时, 在磁场施加的洛伦兹力和涡旋电场的电场力共同作用下电子做加速圆周运动。由于涡旋电场和磁场都是周期性变化的, 只有在涡旋电场的方向与电子绕行方向相反时, 电子才能得到加速, 所以每次电子束注入并得到加速后, 要在涡旋电场的方向改变之前把电子引出使用。容易分析出,

电子得到加速的时间最长只是交变电流周期 T 的四分之一。这个时间虽短，但由于电子束注入真空室时初速度相当大，所以在加速的短短时间内，电子束已在环内加速绕行了几十万

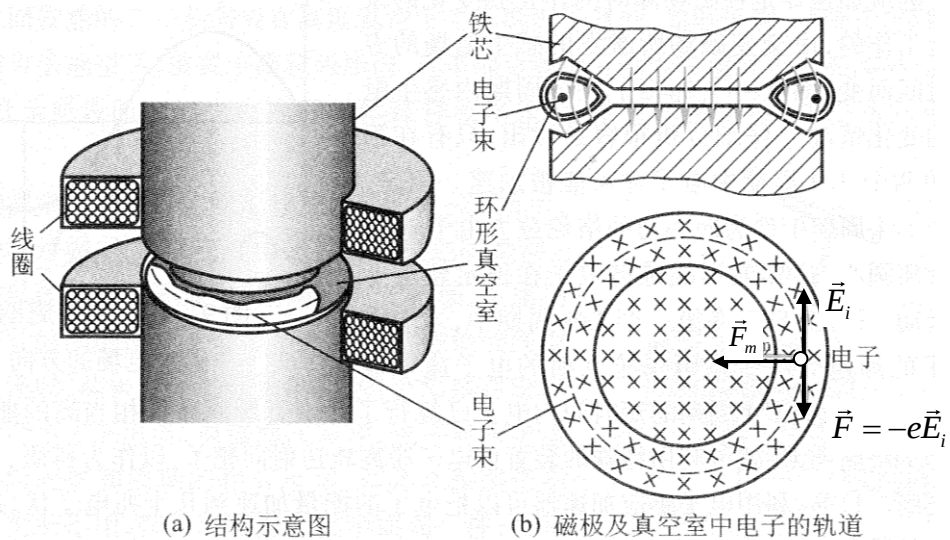


图 11-16 电子感应加速器结构原理图

圈。小型电子感应加速器可把电子加速到 $0.1 \sim 1\text{MeV}$,用来产生 X 射线。大型的加速器可使电子能量达数百 MeV,用于科学研究。

11.3.2 涡电流

当大块导体放在变化着的磁场中或相对于磁场运动时，在这块导体中也会出现感应电流。这种在金属导体内部自成闭合的电流称为**涡电流**，如图 11-17 所示。由于在金属导体中电流流经的横截面积很大，电阻很小，所以涡电流可以很大，能释放出大量焦耳热，这就是感应加热的原理。

用涡电流加热的方法有很多独特的优点。这种方法是在物料内部各处同时加热，而不是把热量从外面逐层地传导进去。用这种方法还可以把被熔金属和坩锅放在真空中，使被熔金属不致在高温下氧化。还有一些需要在高度真空下工作的电子器件，如电子管、示波管、显微管等在用一般的方法抽空后，被置

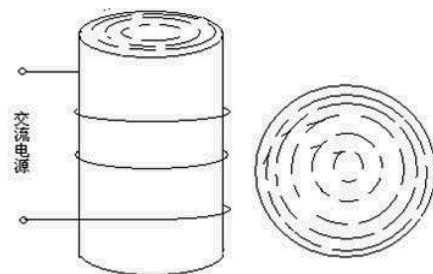


图 11-17 涡电流

于高频磁场内，其中的金属部分隔着玻璃管子也被加热，温度升高后，吸附在金属表面上的

少许残存气体被释放出来，由抽气机抽出，可使之达到更高的真空。

理论分析表明，涡电流强度与交变电流的频率有关。原因如下：感应电动势与磁通量随时间的变化率成正比，而磁通量随时间的变化率又与交变电流的频率成正比，所以感应电动势从而涡电流应与交变电流的频率成正比。在可以忽略涡电流自身激发磁场的情况下，根据电流产生的热量与电流的二次方成正比的焦耳定律，便可知道涡电流所产生的热量与交变电流的频率的二次方成正比。这也就是在熔化金属时，通常采用高频电炉的原因。

大块金属导体在磁场中运动时，导体上产生涡流。反过来，有涡电流的导体又受到磁场的安培力的作用。根据楞次定律，安培力阻碍金属导体在磁场中的运动，这就是**电磁阻尼**的原理。例如磁电式电表中的电气机车的电磁制动器中的阻尼装置，就是应用涡电流实现其阻尼作用的。

涡电流产生的热效应虽然有着广泛的应用，但是在有些情况下有很大的弊害。例如，在发电机和变压器的铁芯中常常因涡电流产生无用的热量，不仅造成电能浪费，而且会因铁芯严重发热而不能正常工作。为了减小涡流损耗，一般变压器、电机及其他交流仪器的铁芯不采用整块材料，而是用相互绝缘的薄片（如硅钢片）或细条叠合而成，使涡流受绝缘的限制，只能在薄片范围内流动，于是增大了电阻，减小了涡电流，使损耗降低。

11.4 自感应与互感应

11.4.1 自感应

电流流过线圈时，其磁感线将穿过线圈本身，因而给线圈提供了磁通。如果电流随时间变化，线圈中就会因磁通量变化而产生感生电动势，这种现象称为自感现象，相应的感生电动势称为自感电动势。根据毕奥—萨伐尔定律，电流在空间各点激发的磁感应强度 $\vec{B}$ 都与电流 I 成正比（有铁芯的线圈除外），而对同一个线圈， Ψ 又与 $\vec{B}$ 成正比，故 Ψ 与回路中电流 I 成正比，即

$$\Psi = LI \quad (11-12)$$

式(11-12)中系数 L 称为线圈的**自感系数**，简称**自感**，它取决于线圈的大小、形状、匝数以及周围的磁介质的分布而与电流无关（有铁芯的线圈除外）。当回路的形状与回路周围的磁介质不变，而电流随时间变化时，线圈中自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (11-13)$$

式(11-13)中的负号是楞次定律的数学表示,它指出**自感电动势将反抗回路中电流的改变**。也就是说,电流增加时,自感电动势与原来电流的方向相反;电流减少时,自感电动势与原来电流的方向相同。在国际单位制中,自感的单位是亨利 [H], $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} / \text{A}$ 或 $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} / \text{A} \cdot \Omega$

实际问题中, L 的计算极为复杂,往往需要根据式(11-13)通过实验测定。只有极少数简单情形可按式(11-12)计算。其主要步骤是:

1. 假设线圈中通有电流 I , 然后确定电流 I 在线圈内产生的磁场;
2. 计算通过线圈的全磁通 Ψ ;
3. 由式(11-12), 即 $L = \frac{\Psi}{I}$ 求出 L 。

例 11-8 长直螺线管长为 l , 横截面积为 S , 线圈的总匝数为 N , 管中介质的磁导率为 μ 。试求其自感 L 。

解 设线圈电流为 I , 管内的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小为 $B = \mu \frac{N}{l} I$

通过每匝线圈磁通量为 $\Phi_M = BS = \mu \frac{N}{l} I S$

通过 N 匝线圈全磁通为 $\Psi = N \Phi_M = \mu \frac{N^2}{l} I S$

由 $\Psi = LI$ 有 $L = \mu \frac{N^2}{l} S$

设螺线管单位长度上线圈的匝数为 n , 体积为 V , 有 $n = N/l$ 和 $V = lS$, 故上式可变形为

$$L = \mu n^2 V$$

由于计算中忽略了边缘效应,所以计算值是近似的,实际测量值比它小些。

例 11-9 如图 11-18 所示, 一根电缆由共轴的两个薄壁金属管构成, 半径分别为 a 、 b , 电流从内筒端流入, 经外筒端流出, 两筒之间充满磁导率为 μ 的介质, 电流为 I 。求单位长度同轴电缆的自感。

解 这种电缆可视为单匝回路, 其磁通量即为通过任一截面的磁通量。筒间距轴 r 处的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

取长为 h 一段电缆来考虑, 穿过阴影面积磁通量为

$$d\Phi_M = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = Bh dr$$

$$\Phi_M = \int d\Phi_M = \int_a^b \frac{\mu I h}{2\pi r} dr = \frac{\mu I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

单位长度的电缆自感系数为 $L_0 = \frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

从例 11-8 和 11-9 的结果可以看到，螺线管的自感只

与螺线管自身结构和所处介质环境有关，与电流 I 无关。

11.4.2 互感应

如图 11-19 所示，两相邻线圈 1 和 2 分别通有电流 I_1 和 I_2 。当线圈 1 中的电流变化时，其激发的

磁场也随之变化。这样，在它相邻的线圈 2 中就有

感应电动势产生。同样，当线圈 2 中的电流变化时，

也会在线圈 1 中产生感应电动势。这种现象称为**互感现象**，所产生的电动势称为**互感电动势**。

在两线圈的形状、相互位置保持不变时，根据毕奥—萨伐尔定律，由电流 I_1 产生的空间各点磁感应强度 $\vec{B}_1$ 均与 I_1 成正比。通过线圈 2 的磁通匝链数 Ψ_{21} 也与 I_1 成正比，即

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1 \quad (11-14)$$

同理

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2$$

式中 M_{21} 和 M_{12} 是两个比例系数。理论和实验证明 M_{21}

和 M_{12} 相等，一般用 M 来表示，称为两线圈的**互感系数**，简称**互感**。

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (11-15)$$

根据法拉第电磁感应定律，电流 I_1 的变化而在线圈 2 中产生的互感电动势为

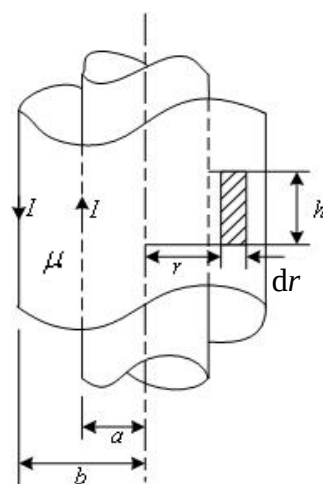


图 11-18 电缆的自感计算

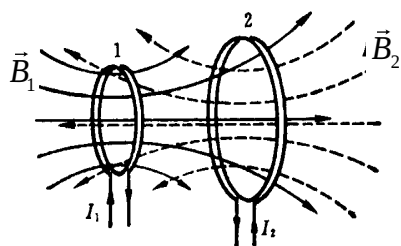


图 11-19 互感现象

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (11-16)$$

同理，电流 I_2 的变化在线圈 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (11-17)$$

在不存在铁磁质情形下， M 由两只线圈的几何形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质的分布决定。在国际单位制中，互感的单位为亨 [H]。

必须指出，线圈周围存在铁磁质时，互感 M 还与线圈中电流有关。

互感的计算与自感相似，其主要步骤是：

- 1 假设某一线圈中通有电流 I_1 ，然后确定电流 I_1 产生的磁场；
- 2 计算 I_1 的磁场通过另一线圈 2 的全磁通 Ψ_{21} ；
- 3 由式 (11-14) 计算 M 。

例 11-10 一密绕的螺绕环(设环的内外半径远大于环的横截面的线度)，单位长度的匝数为 $n = 2000/\text{m}$ ，环的横截面积为 $S = 10 \text{ cm}^2$ ，另一个 $N=10$ 匝的小线圈套绕在环上，如图 11-20 所示。(1)求两个线圈间的互感；(2)当螺绕环中的电流变化率为

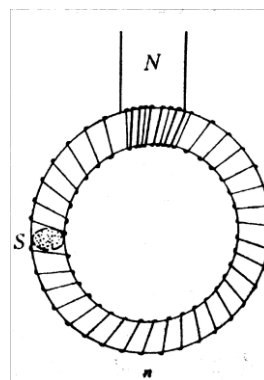


图 11-20 螺绕环与小线圈间互感

$\frac{dI}{dt} = 10 \text{ A/s}$ 时，求在小线圈中产生的互感电动势的大小。

解 螺绕环中磁感应强度的大小 $B = \mu_0 n I$ ，通过 N 匝小线圈的磁链数为

$$\Psi_N = N\Phi_M = N\mu_0 n I S$$

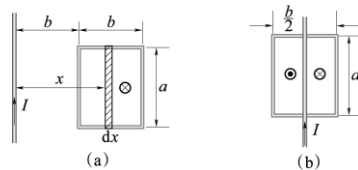
根据互感的定义可得螺绕环与小线圈间的互感为

$$M = \frac{\Psi_N}{I} = \mu_0 n N S = 4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 10 \times 10 \times 10^{-4} \approx 2.5 \times 10^{-5} (\text{H}) = 25 \mu\text{H}$$

(2) 小线圈中产生的互感电动势大小

$$\varepsilon_{21} = \left| -M \frac{dI_1}{dt} \right| = 250 \mu\text{V}$$

课堂训练：矩形线圈长为 a ，宽为 b ，由 100 匝表面绝缘的导线组成，放在一根很长的导线旁边并与之共面。求图中 (a)、(b) 两种情况下线圈与长直导线之间的互感。



解：如(a)图，已知长导线在矩形线圈 x 处磁感应强度为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ ，通过线圈的磁通链数为：

$$\Psi = \int_b^{2b} \frac{N\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{N\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{2b}{b} \quad \text{线圈与长导线的互感为:}$$

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$

图(b)中，直导线两边的磁感应强度方向相反且以导线为轴对称分布，通过矩形线圈的磁通链为零，所以 $M=0$ 。这是消除互感的方法之一。

11.5 磁场能量

在电流激发磁场的过程中，是要供给能量的，所以磁场应具有能量。

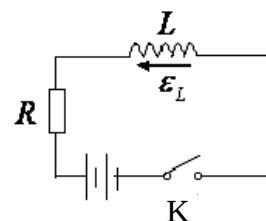


图 11-21 磁场能量的建立

11.5.1 自感磁能

如图 11-21 所示，当 K 闭合后，自感为 L 的线圈与电源接通，回路中的电流不能突变，而是从零逐渐增大到稳定值 I 。这一电流变化在线圈中所产生的自感电动势与电流方向相反，对电流的增长起阻碍作用。要维持电流的持续增长，电源必须反抗自感电动势做功，从而消耗电源的电能并转化为线圈磁场的能量贮存起来。在建立电流 I 的整个过程中，外电源不仅要供给电路中产生焦耳热的能量，而且还要反抗自感电动势做功。

设某一瞬时线圈中的电流为 i ，自感电动势为 $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$ ，在 dt 时间内电源反抗自感电动势做的功为

$$dW = -\varepsilon_L i dt = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$$

在电流从零逐渐增大到稳定值 I 的整个过程中，电源反抗自感电动势做的总功为

$$W = \int dW = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

因此, 自感为 L 的线圈通有电流 I 时所具有的磁能(自感磁能)为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (11-18)$$

11.5.2 磁场能量

当自感线圈有电流通过时, 在线圈中就建立了磁场, 所以自感线圈中的能量, 实际上储存在磁场中。与电场一样, 磁能是定域在磁场中的。为了得到磁场能量与磁感应强度 B 之间的关系, 我们可以从通电自感线圈储存自感磁能的公式, 导出磁场能量密度表达式。长直密绕螺线管的自感为

$$L = \mu_0 n^2 V$$

如果管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质 (非铁磁质), 则

$$L = \mu n^2 V$$

代入式(11-18)可得通有电流 I 的长直密绕螺线管的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V I^2$$

由于长直密绕螺线管的磁场 $H = nI$, $B = \mu nI$, 所以上式可写作

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} BHV$$

V 是长直密绕螺线管内部空间体积, 也就是磁场存在的空间体积, 并且螺线管内部是均匀磁场, 所以

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (11-19)$$

w_m 表示磁场中单位体积空间的能量, 叫磁场能量密度(或称磁能密度)。

上式虽然是从特例导出, 可以证明它是普遍适用的。在国际单位制中, w_m 的单位是焦 / 米³(J/m³)。

而总磁场能量 W_m 等于磁场能量密度对磁场所占有的全部空间的积分, 即

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (11-20)$$

例 11-11 如图 11-22 所示, 求无限长圆柱形同轴电缆长为 l 的一段中磁场的能量及自感. 设内、外导

体的截面半径分别为 $R_1, R_2 (R_2 > R_1)$, 电缆通有电流 I , 两导体之间磁介质的磁导率假设为 μ_0 .

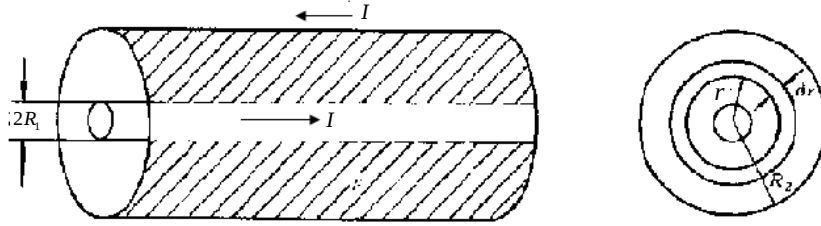


图 11-22 例 11-11 图

解 作为传输超高频信号（如微波）的同轴电缆，由于趋肤效应，磁场只存在于两导体之间，即

$R_1 < r < R_2$ 的空间内. 利用安培环路定理得离开轴线为 r 处的磁感应强度为

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

对长为 l 的一段同轴电缆内总的磁场能量为

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

长度为 l 的自感

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

从本例可知，计算磁场总能量提供了求自感的另一种方法。

作业：1、2、18