第 37 讲 习题课

第 11 章 电磁感应

课程内容

11.1 电磁感应定律

11.2 动生电动势与感生电动势

11.3 电子感应加速器　涡电流

11.4 自感应与互感应

11.5 磁场能量

教学要求

了解电子感应加速器、涡电流产生的原因、合理利用涡电流和减小涡电流的危害；了解耦合因数。

理解动生电动势的定义及其计算、其非静电力——洛伦兹力；感生电场及其性质、动生电动势的定义及其计算；自感现象、自感电动势及其计算、自感系数及其计算、互感现象、互感电动势及其计算、互感系数及其计算；磁场的能量密度及其计算。

掌握电磁感应现象、楞次定律、法拉第电磁感应定律及其应用。

重点与难点

重点：电磁感应现象、楞次定律、法拉第电磁感应定律及其应用。

难点：感生电场及其性质，涡电流

11.1 电磁感应定律

11.1.1 电磁感应现象

不管由于什么原因引起通过闭合回路所包围的面积的磁通量发生变化时，回路中会有电流产生，这种现象叫作电磁感应现象，回路中产生的电流叫作感应电流。感应电流的方向可由楞次定律判断。

11.1.2　楞次定律

楞次定律可以表述为：当穿过闭合导体回路所包围面积的磁通量发生变化时，在回路中就会有感应电流产生，此感应电流的方向总是使它自己的磁场穿过回路面积的磁通量，去抵偿引起感应电流的磁通量的改变。或表述为：闭合的导体回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因(反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等)。

11.1.3　电动势

ε 表示电源电动势：

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = \oint_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad （11\text{-}1）$$

式（11-1）可改写为

$$\varepsilon = \oint_{\mathrm{L}} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{负}^{正} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad （11\text{-}2）$$

式（11-2）又把电源电动势定义为把**单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，电源中的非静电力所作的功。**

电动势虽然不是矢量，但为了便于判断在电流流动时非静电力是作正功还是作负功（也就是电源是放电，还是被充电），通常把**电源内部电势升高的方向，即从负极经电源内部到正极的方向，**规定为**电动势的方向。**电动势的单位和电势的单位相同。

11.1.4 法拉第电磁感应定律

1 法拉第电磁感应定律

法拉第提出的电磁感应定律为：不论任何原因使通过回路面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势与磁通量对时间的变化率成正比。即

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t} \qquad (11\text{-}3)$$

ε_{i} 的单位为伏特(V)，Φ_M 的单位为韦伯(Wb)，t 的单位为秒(s)，负号表示感应电动势方向。

如果回路是由密绕 N 匝线圈串联而成，则

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t} = -\frac{d\Psi_M}{dt} \qquad (11\text{-}4)$$

式中 $\Psi_M = N\Phi_M$，称为**磁通链**。

对于只有电阻 R 的回路，感应电流

$$i = \frac{\varepsilon_{\mathrm{i}}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t} \qquad (11\text{-}5)$$

在 $t_1 \to t_2$ 时间间隔内通过回路导线中任一截面的电量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} idt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_{M1}}^{\Phi_{M2}} d\Phi_M = \frac{1}{R}\left(\Phi_{M1} - \Phi_{M2}\right)$$

式中Φ_{M1}和Φ_{M2}分别是时刻t_1和t_2通过回路的磁通量。

2 感应电动势方向的决定

（1） **根据楞次定律**

1) 判断穿过闭合回路的磁通沿什么方向，发生什么变化(增加或减少)；

2) 根据楞次定律来确定感应电流所激发的磁场沿什么方向(与原来的磁场同向还是反向)；

3)根据右手螺旋法则从感应电流产生的磁场方向确定感应电动势的方向。

（2）根据法拉第电磁感应定律

1) 确定回路绕行正方向和$\vec{e}_n$，通常使通过回路所围面积的磁通量为正；

2) 判断$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t}$的正负,从而$\varepsilon_\mathrm{i}$的正负；

3) 由ε_i的正负与回路绕行正方向的关系确定ε_i的方向。

11.2 动生电动势与感生电动势

11.2.1 动生电动势

在磁场中运动导体棒 ab 所产生的动生电动势为

$$\varepsilon_\mathrm{i}=\int_L \vec{E}_\mathrm{k}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_L(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{11-7}$$

积分是沿运动的导线段进行，式(11-7)提供了计算动生电动势的方法。

应用式(11-7)求动生电动势的主要步骤：

1. 选取微元$\mathrm{d}\vec{l}$，各微元产生的动生电动势$\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{i}=\upsilon B\sin\theta\cdot\mathrm{d}l\cos\alpha$，其中$\theta$为$\vec{\upsilon}$和$\vec{B}$之间的夹角，$\alpha$为$\vec{\upsilon}\times\vec{B}$和$\mathrm{d}\vec{l}$之间的夹角。

2. 统一积分变量，确定积分上下限，积分$\varepsilon_\mathrm{i}=\int_L\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{i}$，积分值为正，说明$\varepsilon_\mathrm{i}$指向与积分路径走向一致；积分值为负，说明$\varepsilon_\mathrm{i}$指向与积分路径走向相反。

注：当导体为闭合回路时 $\varepsilon_\mathrm{i}=\oint_L\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{i}=\oint_L\vec{E}_\mathrm{k}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

此时仍然可以使用法拉第电磁感应定律计算动生电动势；在导体为非闭合回路时,有时也可

通过增加辅助线,构成闭合回路,从而使用法拉第电磁感应定律进行计算。

11.2.2 感生电动势

$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=\oint_L \vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\frac{d\Phi_M}{dt} \qquad (11\text{-}8)$$

因为对 L 围成的面积 S，磁通量 $\Phi_M=\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ ，而这里 $\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t}$ 中只计及磁场 $\vec{B}$ 的变化，也即闭合回路 L 不动，所以感生电动势为

$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad (11\text{-}9)$$

由式（11-8)、(11-9)得

$$\oint_L \vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad (11\text{-}10)$$

式(11-9)中 S 表示以回路 L 为边界的任一曲面的面积，是麦克斯韦方程组的基本方程之一。此式表明, **感生电场的场强沿任意闭合曲线的线积分等于以该曲线为边界的的任意曲面的磁通量对时间变化率的负值。**

11. 3 电子感应加速器　涡电流

11.3.1 电子感应加速器

11.3.2　涡电流

当大块导体放在变化着的磁场中或相对于磁场运动时，在这块导体中也会出现感应电流。这种在金属导体内部自成闭合的电流称为**涡电流**，

11.4 自感应与互感应

11.4.1 自感应

电流流过线圈时，其磁感线将穿过线圈本身，因而给线圈提供了磁通。如果电流随时间变化，线圈中就会因磁通量变化而产生感生电动势，这种现象称为自感现象，相应的感生电动势称为自感电动势。

线圈中自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{11-13}$$

式(11-13)中的负号是楞次定律的数学表示，它指出**自感电动势将反抗回路中电流的改变**。也就是说，电流增加时，自感电动势与原来电流的方向相反；电流减少时，自感电动势与原来电流的方向相同。在国际单位制中，自感的单位是亨利［H］，$1\,\mathrm{H}=1\,\mathrm{Wb/A}$ 或

$1\,\mathrm{H}=1\,\mathrm{V\cdot s/A}=1\,\Omega\cdot\mathrm{s}$

11.4.2 互感应

电流 I_1 的变化而在线圈 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{11-16}$$

同理，电流 I_2 的变化在线圈 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{11-17}$$

11.5 磁场能量

11.5.1 自感磁能

电源反抗自感电动势做的总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^I Li\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

因此，自感为 L 的线圈通有电流 I 时所具有的磁能(**自感磁能**)为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2 \tag{11-18}$$

11.5.2 磁场能量

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V = \frac{1}{2}BHV$$

V 是长直密绕螺线管内部空间体积，也就是磁场存在的空间体积，并且螺线管内部是均匀磁场，所以

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \qquad (11\text{-}19)$$

w_m 表示磁场中单位体积空间的能量，叫磁场能量密度(或称磁能密度)。

上式虽然是从特例导出，可以证明它是普遍适用的。在国际单位制中，w_m 的单位是焦／米^3(J/m^3)。

而总磁场能量W_m等于磁场能量密度对磁场所占有的全部空间的积分，即

$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\mathrm{d}V \qquad (11\text{-}20)$$

例 1 填空题

(1)将金属圆环从磁极间沿与磁感应强度垂直的方向抽出时，圆环将受到____。

[答案：磁力]

(2)产生动生电动势的非静电场力是____，产生感生电动势的非静电场力是____，激发感生电场的场源是____。

[答案：洛伦兹力，涡旋电场力，变化的磁场]

(3)长为 l 的金属直导线在垂直于均匀的平面内以角速度 ω 转动，如果转轴的位置在____，这个导线上的电动势最大，数值为____；如果转轴的位置在____，整个导线上的电动势最小，数值为____。

[答案：端点，$\frac{1}{2}B\omega l^2$；中点，0]

例 2 选择题

（1）一圆形线圈在磁场中作下列运动时，那些情况会产生感应电流（）

（A）沿垂直磁场方向平移；（B）以直径为轴转动，轴跟磁场垂直；

（C）沿平行磁场方向平移；（D）以直径为轴转动，轴跟磁场平行。

[答案：B]

(2)下列哪些矢量场为保守力场（）

（A）静电场；（B）稳恒磁场；（C）感生电场；（D）变化的磁场。

[答案：A]

(3) 用线圈的自感系数 L 来表示载流线圈磁场能量的公式$W_m = \frac{1}{2}LI^2$（）

（A）只适用于无限长密绕线管；（B）只适用于一个匝数很多，且密绕的螺线环；

（ C ） 只适用于单匝圆线圈；　（ D)适用于自感系数L 一定的任意线圈。

[答案：D]

(4)对于涡旋电场，下列说法不正确的是()：

（A）涡旋电场对电荷有作用力；　（B）涡旋电场由变化的磁场产生；

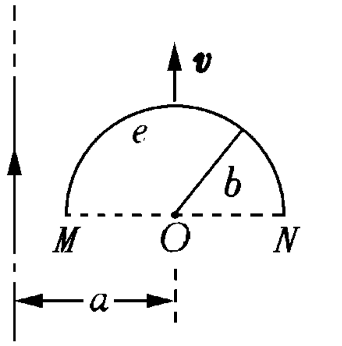
（C）涡旋场由电荷激发；　　（D）涡旋电场的电力线闭合的。

[答案：C]

例 3 如题3图所示，载有电流I的长直导线附近，放一导体半圆环MeN与长直导线共面，且端点MN的连线与长直导线垂直．半圆环的半径为b，环心O与导线相距a．设半圆环以速度v平行导线平移．求半圆环内感应电动势的大小和方向及MN两端的电压 $U_M - U_N$．

解：作辅助线MN，则在$MeNM$回路中，沿$\vec{v}$方向运动时$\mathrm{d}\Phi_m = 0$

$$\therefore \qquad \varepsilon_{MeNM} = 0$$



题 3 图

即 $\varepsilon_{MeN} = \varepsilon_{MN}$

又∵ $\varepsilon_{MN} = \int_{a-b}^{a+b} vB\cos\pi \mathrm{d}l = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\dfrac{a-b}{a+b} < 0$

所以ε_{MeN}沿NeM方向，

大小为 $\dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\dfrac{a+b}{a-b}$

M点电势高于N点电势，即

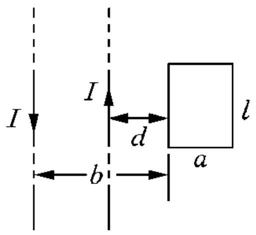
$$U_M - U_N = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

例 4 如题4所示，在两平行载流的无限长直导线的平面内有一矩形线圈．两导线中的电流方

向相反、大小相等，且电流以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$的变化率增大，求：

(1)任一时刻线圈内所通过的磁通量；

(2)线圈中的感应电动势.



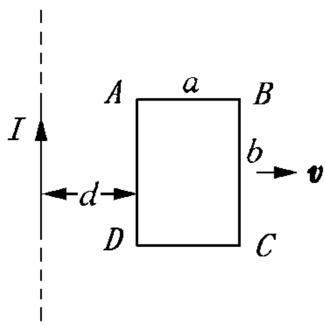
题 4 图

解：以向外磁通为正则

(1) $\Phi_m = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\mathrm{d}r - \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}[\ln\frac{b+a}{b} - \ln\frac{d+a}{d}]$

(2) $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}[\ln\frac{d+a}{d} - \ln\frac{b+a}{b}]\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

例 5 如题5图所示，长直导线通以电流I=5A，在其右方放一长方形线圈，两者共面．线圈长b=0.06m，宽a=0.04m，线圈以速度v=0.03m·s^{-1}垂直于直线平移远离．求：



题5图

d=0.05m时线圈中感应电动势的大小和方向．

解：对AB、CD，运动速度v与磁感应强度$\vec{B}$叉乘后的方向与积分路径垂直，不产生感应电动势．

DA产生电动势 $\varepsilon_1 = \int_D^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = vBb = vb\frac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{d}}$

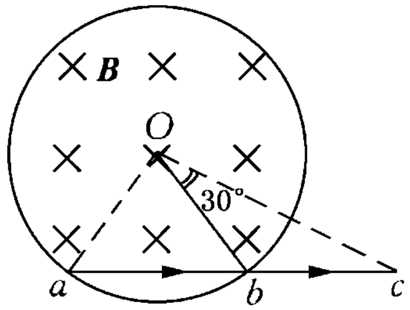
BC产生电动势 $\varepsilon_2 = \int_B^C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -vb\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)}$

∴回路中总感应电动势

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 Ibv}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}\right) = 1.6\times10^{-8} \quad \text{V}$$

方向沿顺时针.

例 6 磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场充满一半径为 R 的圆柱形空间，一金属杆放在题 6 图中位置，杆长为 $2R$，其中一半位于磁场内、另一半在磁场外. 当 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时，求：杆两端的感应电动势的大小和方向.



题6图

解： ∵ $\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc}$

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 B\right] = \frac{\sqrt{3}R}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{bc} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{\pi R^2}{12}B\right] = \frac{\pi R^2}{12}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

∴ $\varepsilon_{ac} = \left[\frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{12}\right]\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

∵ $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$

∴ $\varepsilon_{ac} > 0$ 即 ε 从 $a \to c$

作业：3、18、19